北海道大学数学ⅠAⅡBを受講する皆さんへ

このテキストを手にしている皆さんは，志高くここまで勉強を進めてきたと思います。その努力を，**北海道大学に通用する力に仕上げるために必要なこと**とは？　…それをお話しする前に，まずは皆さんは**「細やかな技術」**がきちんと身についていますか？　特に高２までに数学の各分野のさまざまな問題を通じ，皆さんはさまざまな技術を磨いてきたはずです。もし不足している部分・分野が自覚されたときには，速やかに技術を再び磨いておいてください。

さて，数学においてはよく「応用力がない」という声を耳にします。それはいわゆる「公式暗記型」でしか数学を勉強していない人によく見られる気がします。「２次方程式が異なる２つの実数解をもつ」 ⇒ 「判別式 $D>0$」といったように。数学で大切なのは「⇒」，いわゆる「プロセス」の部分です。そこに至る「背景」「理由」ですね。それを理解した上で「⇒」をショートカットする分にはまったくかまいませんが。皆さんはちゃんとそれを自覚してきましたか？

そして，「応用力」とはまさに**「プロセス力」**と言えましょう。問題を見たとき，その問題が語っていることをその字面の奥に潜む部分まで読み込み，どこに自分の手で解決しなければならない「壁」があるのかを考えるわけです。さらに壁を越えるために何が必要か。その「鍵」がこの「⇒」に隠されています。そうです，それを選択すべき「理由」があるのです。はたまた，時には形の美しさといった，数学の枠を越えた部分にヒントが隠されていることもあるでしょう。それを見抜き，立式し，磨いた技術をもって計算し答案として仕上げていくのです。

このテキストは，この**「プロセス力」を養うために必要な問題が厳選**されています。後述しますが，このテキストの使い方に従い，画面を通じて伝わってくるものを目で，耳で，肌で吸収し，自分のものとするための**復習を実践**すれば（ここ大事！），無限に広がる数学の世界の扉は確実に開かれます。今日の授業から何が皆さんに伝わってきたのか。それを反芻し，ほかの異なる場面においても**「考える」癖をつける**。それこそが，北海道大学に通用する力となるでしょう。

そうです。**「この講座だけをやればいい」のではありません**。「傾向と対策」というものは，大学入試には存在しません。「たまたま」出ることが多かった分野に絞って勉強することのリスクが高すぎるからです。扉を開いた後は，自ら歩んでいくことです。そのために必要な問題集もご紹介いたします。扉が開かれているのにその先に進まない人はいないでしょう。なぜならば，その先にあなた方が目指す「北海道大学」があるのですから。

この講座を見るたびに，さまざまな「開かずの扉」が音を立てて開くでしょう。決してテクニカルなことは要求しません。必要なのは，磨いてきたはずの**技術**，そしてその技術を活かすべくこの講座をとらえる**謙虚な姿勢**，そして受かりたいという**気持ち**です。その気持ちで授業を聞き，もし感動することがあっても，感動したという事実だけでその日を終わらないでください。せっかく開きかけた扉も，時間がたてば自動的に閉まります。**真に感動すべきは，自分で「未知なる道」を切り開いた時**です。その感動をかみしめながら，一歩，また一歩，北海道大学を目指して前進しましょう。何かを見失ったとき，忘れた時，私は，指南役としていつもあなたのそばに現れます。

山内　恵介

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜北海道大学数学 IAⅡB　目次＞

第１講　２次関数・方程式・不等式
第２講　場合の数・確率
第３講　三角・指数・対数関数
第４講　図形と方程式
第５講　微分法・積分法①
第６講　微分法・積分法②
第７講　ベクトル
第８講　数列
第９講　総合問題⑴
第 10 講　総合問題⑵

＜講座の受講の仕方＞

①　予習について

すべての講は「講義問題」３問で形成されています。まずは何も見ないで問題をノートまたはルーズリーフに解いてみましょう。自分が問題をとらえる力がどこまで養われているかわかります。

ここでは必ずしも答案形式にこだわる必要はありません。掲載されている問題はすべて実際に北海道大学の入試に出題されたものですから，最後まで解けないことも多いかもしれません。それでも，いろいろな可能性を追ってみましょう。

ちなみに１問にかけてよい時間はおよそ 20 分です。もちろん，このまま続ければ（おそらく）最後の答に行き着く！　というところまでいっている場合は，30 分まではかけて結構です。３問でおよそ１時間から１時間半。数学に本気で向き合う時間です。

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です。それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じとってください。問題が掲載されているページはすべて見開きの構成となっており，余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています。ここには何でも「自由」に書いて残すことができます。「自由」とはどういうことか。　それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです。授業時間は限られていま

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

すから，先生はすべてを黒板に書くことはしていません。よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じとったことを記しておくべきなのです。きれいにまとめても誰も見てくれませんよ。あくまで「Note」＝「記録」です。後から見て自分だけがわかる程度でいいのです。

ちなみにここまでの人生で書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ。この講座はいつでも止めたり戻ったりできます。もちろん，聞きながら書くという訓練はこれからでも遅くありません。ちなみに止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です。あなた方に残された時間は限られています。勉強は数学だけじゃないでしょう？　大枠をとらえた上で，細かいところに後からこだわる姿勢も大事です。もちろんそれでも「今日はこれを解決しないと眠れない！」という人…。明日は寝不足で学校に行くことになるかもしれませんが，先生がとことんお付き合いします。そんな日も時にはあっていいのかもしれませんね。

ちなみに各講義を通じ，この問題から得られることを「Point Pickup」と題して簡潔にお伝えいたします。これもテキストに残しておきましょう。

③　復習について　その１

まずは問題によって語られた「ストーリー」を，テキストの問題やPoint Pickupを見ながらもう一度頭に描いてみましょう。もし思い出せない場面があったらノートを見てみましょう。そしてそこで描いた世界観を元に，次に自分で実際に問題を解いてみましょう。予習と異なり，ここでは計算も含め実際にていねいに記述していきましょう。もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします。

もちろん数学という科目の特性上，あなたの技術力の不足などで途中で止まってしまうかもしれません。また，あなたの想いをどう記述で表現していいかわからない場合もあるかもしれません。安心してください。すべての問題に「模範解答」がついています。必要に応じ，画面を見る，またはプリントアウトして参考にしてください。

講義問題の復習をこのように欠かすことなく行い，解答を自分で書き上げることができた時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です。こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう。

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います。そういった場合は，時間をおいて今一度問題を解き直すことをお勧めします。チャンスは「空き時間」「隙間時間」です。一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります。それを実感することも成長の糧となるでしょう。

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう。「練習問題」が各講２題ずつ用意してあります。講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります。また問題によって難易度もさまざまです。

解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう。解答にはワンポ

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

イントのコメントもついています。この「練習問題」もまた，皆さんの成長のために厳選した問題です。より理解を深めていただきたく思います。

以上を確実に繰り返すことにより，確実に「自分で考える」領域に至ることができます。それはもしかしたら自分の力だけで到達したかもしれない領域です。しかし，もしそうであったとしても，そこに至る確実性の高いものがあるとしたら，それを選択することによって浮いた時間や労力をほかの学習に回すことができるでしょう。この講義がそういう目的をかなえるための存在であること，それは繰り返しますがサイクルを確実に構築した人だけがわかることです。皆さんの日々の努力，期待しています。

☆数学ⅠAⅡB 「おすすめの参考書」☆

この講義と同時並行で進めると効果的な書籍を以下に挙げておきます。学校の授業で課せられた課題などとのバランスを見ながら，着々と進めていきましょう。

ちなみに数学の日々の自主学習において，詳細な解答がないものはまったくお勧めできません。答に行き着く「プロセス」が数学であることは前述した通りです。最後の「答」しかない問題集やプリントではお話になりません。自分で考えれば必ず答にたどり着く！とおっしゃられる方もおりますが,「各知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」がまったく考慮されておらず,「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えましょう。受験勉強, 特に受験が近づいてきている時期に求められるのは,「時間対効果」です。

よい道筋を参考に，自分で切り開く時の「道標」とする。以下に挙げるのはそんな本です。また，センター試験の勉強に本格的に入ると，数学の記述力が確実に落ちます。良問を通じた日々のたゆまぬ記述訓練がそれを防ぐことになるでしょう。

【入試突破のための基礎固め】

・**「１対１対応の演習」（東京出版）**

例題を元に，入試の典型的解法を身につけることができます。Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲ・Cの全６冊です。教科書およびチャート式などの参考書で積み上げてきた知識をもう一歩上の実力に上げるための本です。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【入試問題集】

・新数学スタンダード演習ⅠAⅡB　(東京出版)

入試の典型問題を網羅したものです。分野別となっていて，日々のペースメーカーに最適です。「大学への数学」という月刊誌の４月増刊号です。

増刊号ですから，入試が近づくにつれて各書店の在庫がなくなりますので注意してください。

・理系数学の良問プラチカ　数学ⅠAⅡB　(河合塾 SERIES)

良問と詳細な解説が掲載されており，自主学習に適しています。ちなみに「文系数学の良問プラチカ」は，この「理系数学」よりレベルが高いため最初に手をつけないように！

・北海道大学　赤本　(教学社)

有名な過去問題集です。第一志望が決定したら購入しておきましょう。傾向を知る，というより近年こういうレベルの問題が出ている，ということを肌で感じることができます。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　２次関数・方程式・不等式

[1]　変数 x が $x^2+bx \leqq -x$ $(b<-1)$ を満満たすとき，x^2+bx の最小値が $-\dfrac{1}{2}$ であるように b の値を定めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　x に関する２次不等式

$$p\{x^2-(p^2+p+2)x+p^3+2p^2\}\leqq 0$$

を満足する x の最大値が３となるように p を定めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　α，β を $0<\alpha<\beta<2$ を満たす実数とし，$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を $f(x)=|(x-\alpha)(x-\beta)|$ とする．

(1)　$f(x)$ の最大値を M とする．$f(x)=M$ となる x がちょうど3つあるとき，実数 α，β と M の値を求めよ．

(2)　(1)で求めた α，β について，$f(x)-mx=0$ が異なる3つの解をもつような実数 m の値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　２次関数・方程式・不等式

$\boxed{1}$　変数 x が $x^2+bx \leqq -x$　$(b<-1)$ を満たすとき，x^2+bx の最小値が $-\dfrac{1}{2}$ であるようにbの値を定めよ．

$x^2+bx \leqq -x$　より　$x^2+(b+1)x \leqq 0$　であるから　$x\{x-(-b-1)\} \leqq 0$

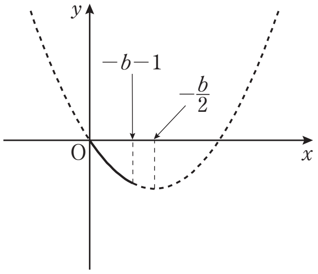
$b<-1$ より　$-b-1>0$　よって　$0 \leqq x \leqq -b-1$　……①

ここで，$f(x)=x^2+bx=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2-\dfrac{b^2}{4}$ とおき，①の範囲における $f(x)$ の最小値を求める．

(ｉ)　$-b-1<-\dfrac{b}{2}$　つまり　$-2<b<-1$ のとき

$f(x)$ の最小値は $f(-b-1)=(-b-1)^2+b(-b-1)=b+1$

よって　$b+1=-\dfrac{1}{2}$　　$b=-\dfrac{3}{2}$（$-2<b<-1$ を満たす）

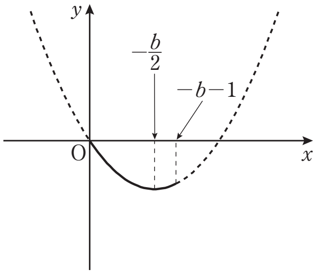


(ii)　$-\dfrac{b}{2} \leqq -b-1$　つまり　$b \leqq -2$ のとき

$f(x)$ の最小値は　$f\left(-\dfrac{b}{2}\right)=-\dfrac{b^2}{4}$

よって　$-\dfrac{b^2}{4}=-\dfrac{1}{2}$　　$b=\pm\sqrt{2}$

これらは $b \leqq -2$ を満たさず不適.



(ｉ)(ii)より　$\boldsymbol{b=-\dfrac{3}{2}}$

$\boxed{2}$　x に関する２次不等式 $p\{x^2-(p^2+p+2)x+p^3+2p^2\} \leqq 0$ を満足する x の最大値が３となるように p を定めよ．

$$p\{x^2-(p^2+p+2)x+p^3+2p^2\} \leqq 0$$
$$p\{x^2-(p^2+p+2)x+p^2(p+2)\} \leqq 0$$
$$p(x-p^2)\{x-(p+2)\} \leqq 0$$

この不等式を満足させる x の値の最大値が存在するためには，$p>0$ であることが必要である.

このとき　$(x-p^2)\{x-(p+2)\} \leqq 0$　　これを満足する x の値の最大値を考える.

$p^2<p+2$　を整理して　$(p+1)(p-2)<0$ より

(ｉ)　$0<p<2$ のとき　$p^2 \leqq x \leqq p+2$　　よって　$p+2=3$　　$p=1$（$0<p<2$ を満たす）

(ii)　$p=2$ のとき　$x=p^2=p+2=4$　　これは x の最大値が３であることを満たさず不適.

(iii)　$p>2$ のとき　$p+2 \leqq x \leqq p^2$　　よって　$p^2=3$　　$p=\pm\sqrt{3}$

これは $p>2$ を満たさず不適.

(ｉ)〜(iii)より　$\boldsymbol{p=1}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 α，β を $0<\alpha<\beta<2$ を満たす実数とし，$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を $f(x)=|(x-\alpha)(x-\beta)|$ とする．

(1) $f(x)$ の最大値を M とする．$f(x)=M$ となる x がちょうど3つあるとき，実数 α，β と M の値を求めよ．

(2) (1)で求めた α，β について，$f(x)-mx=0$ が異なる3つの解をもつような実数 m の値の範囲を求めよ．

(1) $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{4}+\alpha\beta$

グラフの対称性を考えると，$0 \leqq x \leqq 2$ の変域に $f(x)=M$ となる x がちょうど3つあるのは，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$　かつ　$f(0)=f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)(=f(2))=M$　のときである．

それは，$\alpha+\beta=2$　…①　かつ　$\alpha\beta=\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{4}-\alpha\beta=M$　より

$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}$　…②　　$\boldsymbol{M=\dfrac{1}{2}}$　のとき

①，②より，α，β は2次方程式　$x^2-2x+\dfrac{1}{2}=0$　の2解である．$2x^2-4x+1=0$ を解いて

$\alpha<\beta$ より　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$，$\boldsymbol{\beta=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}$

(2) $f(x)-mx=0$ より，$f(x)=mx$．$y=f(x)$ と $y=mx$（原点通る傾き m の直線）が3つの共有点をもつときの m の範囲を求める．

$y=mx$ が $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき　$m=\dfrac{1}{4}$

$y=mx$ が $y=-x^2+2x-\dfrac{1}{2}$ と接するとき，2式より y を消去し，x について整理した2次方程式　$2x^2-2(2-m)x+1=0$　が重解をもつ．

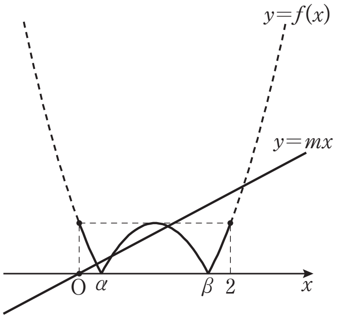
よって，判別式 D について

$\dfrac{D}{4}=(m-2)^2-2=0$　より　$m=2\pm\sqrt{2}$

$m=2+\sqrt{2}$ のとき，重解　$x=\dfrac{2-m}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

これは $\alpha \leqq x \leqq \beta$ を満たさず不適．

$m=2-\sqrt{2}$ のとき，重解　$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　をもち適する．



以上の結果とグラフより，求める m の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{4}<m<2-\sqrt{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　m を実数として，次の2次不等式について考える．$x^2-mx+(m-1)\leqq 0$　…①

以下の問いに答えなさい．

(1)　不等式①を満たす整数 x の個数がちょうど3個であるような実数 m の値の範囲を求めなさい．

(2)　不等式①を満たす整数 x の個数を $N(m)$ で表すことにする．m が整数のとき，$N(m)$ を m を用いて表しなさい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) 関数 $y=|x^2-2x-3|$ のグラフをかけ.

(2) m を実数とする．このとき，方程式 $||x^2-2x-3|-m|=2$ の実数解の個数を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

練習問題解答

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第1講　2次関数・方程式・不等式　　練習問題　解答

[1]　m を実数として，次の2次不等式について考える．$x^2-mx+(m-1)\leqq 0$　…①

以下の問いに答えなさい．

(1)　不等式①を満たす整数 x の個数がちょうど3個であるような実数 m の値の範囲を求めなさい．

(2)　**応用**　不等式①を満たす整数xの個数を $N(m)$ で表すことにする．mが整数のとき，$N(m)$ を m を用いて表しなさい．

解答例

下に凸のグラフ！

(1)　①を変形すると　$(x-1)(x-m+1)\leqq 0$　　この不等式を満たす x は

$1<m-1$　つまり　$2<m$ のとき　$1\leqq x\leqq m-1$

場合分け　$2=m$ のとき　$x=1$

$1>m-1$　つまり　$m<2$ のとき　$m-1\leqq x\leqq 1$

ここをまとめて
$2\leqq m$ のとき $1\leqq x\leqq m-1$
としても可

これらの範囲に含まれる整数が3個であるのは

$3\leqq m-1<4$　または　$-2<m-1\leqq -1$　のとき

よって　$\boldsymbol{-1<m\leqq 0,\ \ 4\leqq m<5}$

(2)　$2\leqq m$ のとき

①の整数解は　$1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m-1$

よって　$N(m)=(m-1)-1+1=m-1$

$m\leqq 1$のとき

$m<2$ としたいところだが，m は「整数」であるため，「2より小さい」整数，つまり「1以下」と考えることができる．整数が関係する問題における範囲の表現方法として覚えておこう．

①の整数解は　$m-1,\ m,\ \cdots\cdots,\ 1$

よって　$N(m)=1-(m-1)+1=-m+3$

以上より

$$\boldsymbol{N(m)=\begin{cases} m-1 & (2\leqq m) \\ -m+3 & (m\leqq 1) \end{cases}}$$

※ [　　] は授業で触れたポイント．定着しているか確認しよう！

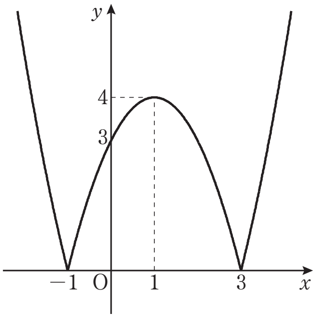
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　(1)　関数 $y=|x^2-2x-3|$ のグラフをかけ.

(2)　m を実数とする．このとき，方程式 $||x^2-2x-3|-m|=2$ の実数解の個数を求めよ.

解答例

(1)　$y=|x^2-2x-3|=|(x-3)(x+1)|$ より，グラフは下のようになる.



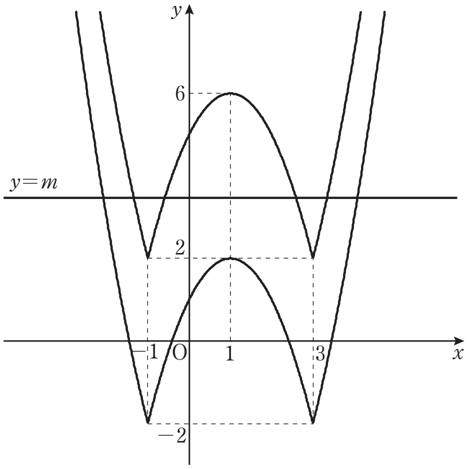
m を分離だ！

(2)　$||x^2-2x-3|-m|=2$ より，$|x^2-2x-3|-m=\pm2 \iff |x^2-2x-3|\pm2=m$

したがって，方程式の実数解の個数は，$y=|x^2-2x-3|\pm2$ のグラフ（(1)のグラフを y 軸方向に ±2 平行移動したもの）と $y=m$ のグラフの共有点の個数である.

右図グラフより，求める実数解の個数は

$$\begin{cases} m<-2 \text{ のとき} & 0\text{個} \\ m=-2 \text{ のとき} & 2\text{個} \\ -2<m<2 \text{ のとき} & 4\text{個} \\ m=2 \text{ のとき} & 5\text{個} \\ 2<m<6 \text{ のとき} & 6\text{個} \\ m=6 \text{ のとき} & 5\text{個} \\ m>6 \text{ のとき} & 4\text{個} \end{cases}$$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。